24/10/19

Π.Α.Τ. (1) $\begin{cases} y' = f(t,y) , & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

λύση του ΠΑΤ.

$f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$, $y\in C^1([a,b])$

Ύπαρξη κ' Μον. του Π.Α.Τ.

Θ.1: Αν $f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$ κ' πληροί την συνθήκη του Lipschitz τότε το ΠΑΤ(1) έχει μοναδική λύση $\forall\, y_0\in\mathbb{R}$

Θ.2: (τοπική Ύπαρξη κ' Μοναδ.)

Αν $c>0$ κ' $f\in C([a,b]\times[y_0-c,y_0+c])$ κ' η f πληροί την συνθήκη Lipschitz, τότε το ΠΑΤ. (1) έχει μοναδική λύση, τουλ. στο $[a,b']$

$b' = \min(b, a+\frac{c}{A})$, $A = \max\limits_{\substack{t\in[a,b]\\ y=[y_0-c,\,y_0+c]}} |f(t,y)|$

Θ.3

Ευστάθεια: Για δοσμένες αρχ. συνθ (AS) $y_0, z_0\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα ΠΑΤ.

$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$, $\begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(a) = z_0 \end{cases}$, $t\in[a,b]$

Αν η f ικανοποιεί την "ολική συνθήκη Lipschitz" τότε

$$\underbrace{\|e(t)\|_\infty}_{=\max\limits_{t\in[a,b]}|y(t)-z(t)|} \le \underbrace{e^{L(b-a)}}_{C}\,\underbrace{|e_0|}_{=|y_0-z_0|}$$

Έστω ότι η f ικανοποιεί την συνθήκη:

(*) $\forall t \in [a,b]$, $\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $(f(t,y_1) - f(t,y_2))(y_1 - y_2) \leq 0$

Η συνθήκη αυτή ονομάζεται: "μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz"

<u>Παρατήρηση:</u> (α) Κίνητρο για αυτή την υπόθεση είναι:

(1) εφαρμογές

(2) εύκολα γενικεύουμε σε συστήματα ΣΔΕ.

(β) Στη βαθμωτή περίπτωση η (*) σημαίνει ότι η f είναι φθίνουσα συνάρτηση της μεταβλητής y, $\forall t \in [a,b]$.

<u>Βαθμωτή περίπτωση:</u>

(1) $\longrightarrow y(t)$ λύση

<u>Διανυσματική περίπτωση:</u>

Σύστημα Σ.Δ.Ε $\longrightarrow \bar{y}(t) = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

<u>π.χ.</u>

$$\begin{cases} y_1' = f_1(t, y_1, y_2) \\ y_2' = f_2(t, y_1, y_2) \end{cases}$$

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

L-V: $\begin{cases} y_1' = a y_1 y_2 + \beta y_1 \\ y_2' = a y_1 y_2 + \gamma y_2 \end{cases}$

↳ αλεπούδες – κουνέλια

↳ αναλυτικά λύνεται όταν το $a \to 0$ ενώ όταν $a \to 1$ το σύστημα παρουσιάζει περίεργη συμπεριφορά

<u>Θ.4.</u>

Για Α.Σ $y_0, z_0 \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα ΠΑΤ:

$$\begin{cases} y' = f(t,y) \\ y(a) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z' = f(t,z) \\ z(a) = z_0 \end{cases}, \quad t \in [a,b]$$

Αν η f ικανοποιεί τη "μονοπλ. συνθήκη Lipschitz" τότε: $|y(t) - z(t)| \leq C|y_0 - z_0|$ $\quad C = 1$

$$\|\varepsilon\|_\infty = \max_t |\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon_0|$$

→ η λύση θα είναι ευσταθής αν υπάρχει φράγμα

το φράγμα θα εξαρτάται από τη C και τη διαφορά των Α.Σ.

Αποδειξη

$\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$, $\varepsilon'(t) = y' - z' = f(t,y) - f(t,z)$

$\varepsilon'(t)\varepsilon(t) = (f(t,y) - f(t,z))\varepsilon(t)$ με χρηση της (*) εχουμε

ότι: $\varepsilon(t)\varepsilon'(t) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\varepsilon^2(t)) \leq 0$, $\forall\, t\in[a,b]$

αρα η $\varepsilon^2(t)$ είναι φθίνουσα συναρτηση του t , ομοια

τ' για την $|\varepsilon(t)|$, οπότε : $|\varepsilon(t)| \leq |\varepsilon_0|$, $\forall\, t\in[\alpha,b]$

αρα $\max\limits_{t\in[a,b]}|\varepsilon(t)| = \max\limits_{t}|y(t) - z(t)| \leq |y_0 - z_0|$ (* *) $\square$

[Ουσιαστικά απομονωνεις καποιες παραμετρους του προβληματος (η σταθ. c) και είναι πιο ευκολοτερο την εξάρτηση στο Θ.3 της c.]

Παρατηρηση : (α) Στην (* *) δεν υπεισέρχεται η Lipschitz.

(β) Απο την (* *) επεται η μοναδικότητα του Π.Α.Τ.

(γ) Η υπαρξη λύσης εξασφαλίζεται απο την συνέχεια της f ($f\in C([a,b]\times\mathbb{R})$).

. . . .

Γραμμική Περιπτωση (πρόβλημα δοκιμής)

$$\begin{cases} y' = \lambda(t)y & t\in[a,b] \\ y(a) = y_0 \end{cases} \quad , \quad f(t,y) = \lambda(t)y(t) + \mu(t)$$

παρατ. 1

τότε η f ικανοποιει την (*) αν τ' μονο αν η $\lambda(t)$ λαμβάνει μη θετικές τιμές ($\lambda(t) \leq 0$)

$$(f(t,y) - f(t,z))(y-z) \leq 0$$

Παρατ. 2

Όταν μιλάμε για ευστάθεια τότε μιλάμε για την διαφορά των λύσεων, $\varepsilon(t) = y(t) - z(t)$ τότε αρκεί να μελετήσουμε την ομογενή περίπτωση, αφού η συνάρτηση $\mu(t)$ δεν παίζει ρόλο Άρα καταλήγουμε στο ΠΑΤ.

$$\begin{cases} y'(t) = \lambda(t) y(t) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$$

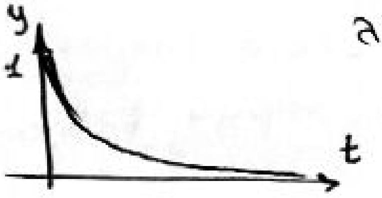
Τότε η εκτίμηση της ευστάθειας είναι:

$$\max_{t\in[a,b]} |y(t)| \le |y_0| \quad , \lambda(t) \le 0$$

Παράδειγμα: Έστω το πρόβλημα δοκιμής.

$$\begin{cases} y' = \lambda y & t\in[0,+\infty) \quad \lambda \le 0 \quad (\lambda\in\mathbb{R}) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

τότε αυτό το ΠΑΤ. έχει αναλυτική λύση $y(t) = e^{\lambda t}$



Συστήματα Σ.Δ.Ε.:

Έστω $m\in\mathbb{N}$, $\bar{f}: [a,b]\times\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $\bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$, ζητείται συνάρτηση, $\bar{y}: [a,b] \to \mathbb{R}^m$ τ.ω.

ΠΑΤ. $(1)'$
$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = \bar{f}(t, \bar{y}(t)), & t\in[a,b] \\ \bar{y}(a) = \bar{y}_0 \end{cases}$$

Όλα τα αποτελέσματα που αναφέρθηκαν πριν ισχύουν για το ΠΑΤ. $(1)'$, αν απλώς αντικαταστήσουμε την $|\cdot|$ με μια οποιαδήποτε νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$

Νορμες

- Νόρμα μεγίστου : $\|\bar{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|, \dots, |x_m|\}$
- Ευκλείδια νόρμα : $\|\bar{x}\| = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^2\right)^{1/2}$

π.χ $\mathbb{R}^3$, $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

$$\|\bar{r}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

ρ-νόρμα : $\|\bar{x}\|_\rho = \left(\sum_{i=1}^{m} |x_i|^\rho\right)^{1/\rho}$

(L^ρ χώρους)

Θεωρημα : (Υπαρξη και Μοναδ. Λυσεων για συστημα ΣΔΕ)

Έστω $f' : [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, συνεχής, η οποία πληροί την συνθήκη του Lipschitz, ως προς τη νόρμα $\|\cdot\|$ του $\mathbb{R}^m$ δηλ. :

$\exists L \in \mathbb{R}, \forall t \in [a,b], \forall \bar{y}_1, \bar{y}_2 \in \mathbb{R}^m : \|\bar{f}(t,\bar{y}_1) - \bar{f}(t,\bar{y}_2)\| \leq L\|\bar{y}_1 - \bar{y}_2\|$

Τότε $\forall \bar{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ το Π.Α.Τ. $(1)'$ λύνεται μονοσήμαντα.

Παρατ. : Προβλήματα Α.Τ. ανώτερης τάξης μπορούν να γραφούν ως Π.Α.Τ. συστημάτων Σ.Δ.Ε. Από το Π.Α.Τ. (2):

$$\begin{cases} y^{m}(t) = f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t)) \\ y^{(i)}(a) = y_0, \quad t \in [a,b], \quad i = 0,1,2,\dots,m-1. \end{cases}$$

Θέτουμε : $\bar{z}(t) = \begin{pmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(m-1)}(t) \end{pmatrix} = (y(t), y'(t), \dots, y^{(m-1)}(t))^T$

$\bar{z}_0 = (y_0, y_1, \dots, y_{m-1})$

Τότε το Π.Α.Τ (2) γράφεται ως:

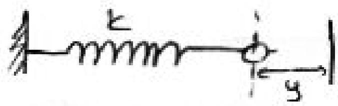
$$(2)': \begin{cases} z_1' = z_2(t) \\ z_2'(t) = z_3(t) \\ z_3'(t) = z_4(t) \\ \vdots & , \ t \in [a,b] \\ z_{m-1}' = z_m(t) \\ z_m'(t) = f(t, z_1(t), z_2(t), \dots, z_m(t)) \\ \bar{z}(a) = \bar{z}_0 \end{cases}$$

απλός αρμονικός ταλαντωτής:

→ ΣΔΕ. 2ης τ., 1ου β. γρ. ομογ

Αυτό προκύπτει από το N.N.: $my''(t) = -k y(t)$

$$y''(t) = -k\, y(t) \quad , k>0 \ , k \neq 0$$



$(m=1)$

$$y(t) = c_1 e^{i\sqrt{k}t} + c_2 e^{-i\sqrt{k}t} \quad ή \quad A\sin(\sqrt{k}t) + B\cos(\sqrt{k}t)$$

Θέτω $y' = z$

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = -ky \end{cases}$$

Ευστάθεια για συστήματα Σ.Δ.Ε

Η f ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθήκη του Lipschitz. Έστω η μετρική είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Τότε μια συνάρτηση $f: [a,b] \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ ικανοποιεί τη μονόπλευρη συνθ. Lipschitz ως προς την y αν:

(3): $\forall\, t \in [a,b]$, $\forall\, y, \tilde{y} \in \mathbb{R}^m$ $(f(t,y) - f(t,\tilde{y}), y - \tilde{y}) \leq 0$

με $(\cdot,\cdot)$ είναι το ευκλείδειο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^m$. Τότε ισχύει: $\|y(t) - z(t)\| \leq \|y_0 - z_0\|$, με $\|\cdot\|$ Ευκλ. νόρμα.

Γραμμικό σύστημα Σ.Δ.Ε.

$$(4): \begin{cases} y'(t) = A(t)\, y(t) + g(t), & t \in [a,b] \\ y(a) = y_0. \end{cases}$$

Το (4) ικανοποιεί την (3) αν και μόνο αν, οι πίνακες $A(t)$, $t \in [a,b]$, είναι μη θετικά ορισμένοι, δηλ.
$\forall\ t \in [a,b]$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$, $(A(t)x, x) \le 0$
(αντίστοιχη συνθήκη μη θετικότητας για προβλ. δοκιμής)

Παράδειγμα

Έστω η γραμμ. εξίσ. $y' = \lambda y$ με $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda = \alpha + \beta i$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
$y = y_1 + i y_2 \in \mathbb{C}$ τότε

βρίσκω τα πραγματικά και τα βάζω στα πίνακα

$$y' = \lambda y \Rightarrow (y_1 + i y_2)' = \overbrace{(a + i\beta)(y_1 + i y_2)}^{a y_1 + i a y_2 + i\beta y_1 - \beta y_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a & -\beta \\ \beta & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad (Ax, x) = a\|x\|^2 \ \forall x \in \mathbb{R}^2$$

άρα το α: μη θετικό (για να ικανοποιείται η συνθήκη)

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$$

Μπορώ να γράψω το προβ. δοκ. και για τους μιγαδικούς αρκεί $\lambda = \alpha + \beta i$ με $a = 0$ ή $a < 0$.